Problems

10 November 2012, Tartu, Estonia

–English version–

Time allowed: 4 hours and 30 minutes.
Questions may be asked during the first 30 minutes.
Tools for writing and drawing are the only ones allowed.

Problem 1. The numbers from 1 to 360 are partitioned into 9 subsets of consecutive integers and the sums of the numbers in each subset are arranged in the cells of a 3×3 square. Is it possible that the square turns out to be a magic square?

Remark: A magic square is a square in which the sums of the numbers in each row, in each column and in both diagonals are all equal.

Problem 2. Let a, b, c be real numbers. Prove that

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Problem 3. a) Show that the equation

$$\lfloor x \rfloor (x^2+1) = x^3,$$

where $\lfloor x \rfloor$ denotes the largest integer not larger than x, has exactly one real solution in each interval between consecutive positive integers.

b) Show that none of the positive real solutions of this equation is rational.

Problem 4. Prove that for infinitely many pairs (a, b) of integers the equation

$$x^{2012} = ax + b$$

has among its solutions two distinct real numbers whose product is 1.

Problem 5. Find all functions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for which

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

holds for all real numbers x and y.

Problem 6. There are 2012 lamps arranged on a table. Two persons play the following game. In each move the player flips the switch of one lamp, but he must never get back an arrangement of the lit lamps that has already been on the table. A player who cannot move loses. Which player has a winning strategy?

Problem 7. On a 2012×2012 board, some cells on the top-right to bottom-left diagonal are marked. None of the marked cells is in a corner. Integers are written in each cell of this board in the following way. All the numbers in the cells along the upper and the left sides of the board are 1's. All the numbers in the marked cells are 0's. Each of the other cells contains a number that is equal to the sum of its upper neighbour and its left neighbour. Prove that the number in the bottom right corner is not divisible by 2011.

Problems

10 November 2012, Tartu, Estonia

–English version–

Problem 8. A directed graph does not contain directed cycles. The number of edges in any directed path does not exceed 99. Prove that it is possible to colour the edges of the graph in 2 colours so that the number of edges in any single-coloured directed path in the graph will not exceed 9.

Problem 9. Zeroes are written in all cells of a 5×5 board. We can take an arbitrary cell and increase by 1 the number in this cell and all cells having a common side with it. Is it possible to obtain the number 2012 in all cells simultaneously?

Problem 10. Two players A and B play the following game. Before the game starts, A chooses 1000 not necessarily different odd primes, and then B chooses half of them and writes them on a blackboard. In each turn a player chooses a positive integer n, erases some primes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ from the blackboard and writes all the prime factors of $p_1p_2\ldots p_n - 2$ instead (if a prime occurs several times in the prime factorization of $p_1p_2\ldots p_n - 2$, it is written as many times as it occurs). Player A starts, and the player whose move leaves the blackboard empty loses the game. Prove that one of the two players has a winning strategy and determine who.

Remark: Since 1 has no prime factors, erasing a single 3 is a legal move.

Problem 11. Let ABC be a triangle with $\angle A = 60^\circ$. The point T lies inside the triangle in such a way that $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Let M be the midpoint of BC. Prove that $TA + TB + TC = 2AM$.

Problem 12. Let $P_0, P_1, \ldots, P_8 = P_0$ be successive points on a circle and Q be a point inside the polygon $P_0P_1\ldots P_7$ such that $\angle P_{i-1}QP_i = 45^\circ$ for $i = 1, \ldots, 8$. Prove that the sum

$$\sum_{i=1}^{8} {P_{i-1}P_i}^2$$

is minimal if and only if Q is the centre of the circle.

Problem 13. Let ABC be an acute triangle, and let H be its orthocentre. Denote by H_A, H_B and H_C the second intersection of the circumcircle with the altitudes from A, B and C respectively. Prove that the area of $\triangle H_AH_BH_C$ does not exceed the area of $\triangle ABC$.

Problem 14. Given a triangle ABC, let its incircle touch the sides BC, CA, AB at D, E, F, respectively. Let G be the midpoint of the segment DE. Prove that $\angle EFC = \angle GFD$.

Problem 15. The circumcentre O of a given cyclic quadrilateral $ABCD$ lies inside the quadrilateral but not on the diagonal AC. The diagonals of the quadrilateral intersect at I. The circumcircle of the triangle AOI meets the sides AD and AB at points P and Q, respectively; the circumcircle of the triangle COI meets the sides CB and CD at points R and S, respectively. Prove that $PQRS$ is a parallelogram.

Problem 16. Let n, m and k be positive integers satisfying $(n-1)n(n+1) = m^k$. Prove that $k = 1$.

Problems

10 November 2012, Tartu, Estonia

–English version–

Problem 17. Let $d(n)$ denote the number of positive divisors of n. Find all triples (n, k, p), where n and k are positive integers and p is a prime number, such that

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Problem 18. Find all triples (a, b, c) of integers satisfying $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Problem 19. Show that $n^n + (n+1)^{n+1}$ is composite for infinitely many positive integers n.

Problem 20. Find all integer solutions of the equation $2x^6 + y^7 = 11$.

Opgaver

10. november 2012, Tartu, Estland

–Danish version–

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Det er tilladt at stille spørgsmål de første 30 minutter.
Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1. Tallene fra 1 til 360 er inddelt i 9 delmængder bestående af på hinanden følgende heltal, og summerne af tallene i hver delmængde placeres derefter i felterne i et 3×3 kvadrat. Er det muligt at dette kvadrat er et magisk kvadrat?

Bemærkning: Et magisk kvadrat er et kvadrat hvor summen af tallene i hver række, hver søjle og hver af de to diagonaler er den samme.

Opgave 2. Lad a, b, c være reelle tal. Vis at

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Opgave 3. a) Vis at ligningen

$$\lfloor x \rfloor (x^2+1) = x^3,$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største heltal mindre end eller lig med x, har præcis en reel løsning i hvert interval mellem to på hinanden følgende positive heltal.

b) Vis at ingen af de positive reelle løsninger til denne ligning er rationelle.

Opgave 4. Vis at for uendeligt mange par (a, b) af hele tal har ligningen

$$x^{2012} = ax + b$$

to forskellige reelle tal, hvis produkt er 1, blandt sine løsninger.

Opgave 5. Bestem alle funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 6. Der er 2012 lamper på et bord. To personer spiller følgende spil. I hvert træk trykker en spiller på kontakten til en lampe, men han må aldrig genskabe en tidligere konfiguration af tændte lamper. Den spiller som først ikke kan trække, taber. Hvilken spiller har en vindende strategi?

Opgave 7. På et 2012×2012 bræt er nogle af felterne på diagonalen fra øverste højre hjørne til nederste venstre hjørne markerede. Ingen af de markerede felter er hjørnefelter. I hvert felt står der et heltal. Alle tallene i felterne langs den øverste kant og den venstre kant er 1. Alle tallene i de markerede felter er 0. Tallet i hvert af de andre felter er summen af tallet ovenfor og tallet til venstre for feltet. Vis at tallet i nederste højre hjørne ikke er deleligt med 2011.

Opgave 8. En orienteret graf indeholder ingen orienterede kredse, og der findes ingen orienterede stier med flere end 99 kanter. Vis at det er muligt at farve grafens kanter i to farver så der ikke findes nogen ensfarvede orienterede stier med flere end 9 kanter.

Opgaver

10. november 2012, Tartu, Estland

–Danish version–

Opgave 9. I hvert felt på et 5×5 bræt står der 0. Det er tilladt at vælge et tilfældigt felt og lægge 1 til både tallet i feltet og tallene i alle de felter der har en side til fælles med feltet. Er det muligt at opnå at der står 2012 på samtlige felter?

Opgave 10. To spillere A og B spiller følgende spil. Før spillet starter vælger A 1000 ikke nødvendigvis forskellige ulige primtal, og B vælger derefter halvdelen og skriver dem på en tavle. I hvert træk vælger en spiller et positivt heltal n, sletter nogle primtal p_1, p_2, …, p_n på tavlen og skriver alle primfaktorerne i $p_1 p_2 \ldots p_n - 2$ i stedet (hvis et primtal optræder flere gange i primfaktoropløsningen, skrives det det antal gange det optræder). Spiller A starter, og den spiller som efterlader tavlen tom, taber spillet. Vis at en af de to spillere har en vindende strategi, og bestem hvem.

Bemærkning: Da 1 ikke har nogen primfaktorer, er det tilladt at slette et enkelt 3-tal.

Opgave 11. Lad ABC være en trekant med $\angle A = 60^\circ$. Punktet T ligger inden i trekanten så $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Lad M være midtpuntet af BC. Vis at $|TA| + |TB| + |TC| = 2|AM|$.

Opgave 12. Lad P_0, P_1, …, $P_8 = P_0$ være punkter på en cirkel i denne rækkefølge, og lad Q være et punkt i ottekanten $P_0 P_1 \ldots P_7$ så $\angle P_{i-1} Q P_i = 45^\circ$ for $i = 1, \ldots, 8$. Vis at summen

$$\sum_{i=1}^{8} |P_{i-1} P_i|^2$$

er minimal hvis og kun hvis Q er cirklens centrum.

Opgave 13. Lad ABC være en spidsvinklet trekant, og lad H være højdernes skæringspunkt. Lad punkterne H_A, H_B og H_C være den omskrevne cirkels andet skæringspunkt med højden fra henholdsvis A, B og C. Vis at arealet af $\triangle H_A H_B H_C$ ikke er større end arealet af $\triangle ABC$.

Opgave 14. I trekant ABC rører den indskrevne cirkel siderne BC, CA, AB i henholdsvis D, E, F. Lad G være midtpunktet af linjestykket DE. Vis at $\angle EFC = \angle GFD$.

Opgave 15. Centrum O for den omskrevne cirkel til den indskrivelige firkant $ABCD$ ligger inden i firkanten, men ikke på diagonalen AC. Firkantens diagonaler skærer hinanden i punktet I. Den omskrevne cirkel til trekant AOI skærer siden AD i punktet P og siden AB i punktet Q. Den omskrevne cirkel til trekant COI skærer siden CB i punktet R og siden CD i punktet S. Vis at $PQRS$ er et parallelogram.

Opgave 16. Lad n, m og k være postive heltal så $(n-1)n(n+1) = m^k$. Vis at $k = 1$.

Opgave 17. Lad $d(n)$ betegne antallet af positive divisorer i n. Find alle tripler (n, k, p), hvor n og k er positive heltal, og p er et primtal, så

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Opgave 18. Find alle heltalstripler (a, b, c) så $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Opgave 19. Vis at $n^n + (n+1)^{n+1}$ er et sammensat tal for uendeligt mange positive heltal n.

Opgave 20. Find alle heltalsløsninger til ligningen $2x^6 + y^7 = 11$.

Ülesanded

10. november 2012, Tartu, Eesti

–Estonian version–

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Tohib kasutada ainult kirjutus- ja joonestusvahendeid.

Ülesanne 1. Arvud 1 kuni 360 jaotatakse üheksaks alamhulgaks, mis koosnevad järjestikustest täisarvudest. Nende alamhulkade arvude summad kirjutatakse 3×3 tabeli lahtritesse. Kas on võimalik, et saadud tabel on maagiline ruut?

Märkus: Maagiliseks ruuduks nimetatakse ruudukujulist arvude tabelit, mille igas reas, igas veerus ja mõlemal diagonaalil olevate arvude summad on kõik võrdsed.

Ülesanne 2. Olgu a, b, c reaalarvud. Tõesta, et

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Ülesanne 3. a) Tõesta, et võrrandil

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x, on täpselt üks reaalarvuline lahend igas lõigus, mille otspunktideks on järjestikused positiivsed täisarvud.

b) Tõesta, et sellel võrrandil ei ole positiivseid ratsionaalarvulisi lahendeid.

Ülesanne 4. Tõesta, et leidub lõpmata palju täisarvude paare (a, b), mille korral võrrandi

$$x^{2012} = ax + b$$

lahendite hulgas on kaks erinevat reaalarvu, mille korrutis on 1.

Ülesanne 5. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis kõigi reaalarvude x ja y korral rahuldavad võrdust

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy)).$$

Ülesanne 6. Laual on 2012 lampi. Kaks inimest mängivad järgmist mängu. Iga käigu ajal vajutab mängija ühe lambi lülitit, aga ta ei tohi tagasi saada ühtegi juba esinenud seisu. Mängija, kes enam käiku teha ei saa, kaotab. Kummal mängijal leidub võitev strateegia?

Ülesanne 7. 2012×2012 ruudustiku diagonaalil tippudega üleval paremas ja all vasakus nurgas on märgistatud mõned ruudud. Ükski märgistatud ruutudest ei asu nurgas. Ruudustiku ruudud täidetakse täisarvudega järgmiselt. Kõigisse ülemises ja vasakus servas asuvatesse ruutudesse kirjutatakse arv 1. Kõigisse märgistatud ruutudesse kirjutatakse 0. Igasse ülejäänud ruutu kirjutatakse tema ülemises ja vasakus naaberruudus olevate arvude summa. Tõesta, et arv, mis asub alumises paremas nurgas, ei jagu arvuga 2011.

Ülesanne 8. Olgu antud suunatud graaf, mis ei sisalda suunatud tsükleid. Servade arv üheski suunatud ahelas ei ole suurem kui 99. Tõesta, et on võimalik värvida selle graafi kõik servad kahe värviga nii, et servade arv üheski ühevärvilises suunatud ahelas ei ole suurem kui 9.

Ülesanne 9. 5×5 ruudustiku igasse ruutu on kirjutatatud arv 0. Meil on lubatud valida ruudustikust suvaline ruut ja suurendada ühe võrra kõiki arve, mis asuvad selles ruudus ja kõigis ruutudes, mis omavad temaga ühist serva. Kas on võimalik saavutada olukord, kus kõigis ruudustiku ruutudes on samaaegselt arv 2012?

Ülesanded

10. november 2012, Tartu, Eesti

–Estonian version–

Ülesanne 10. Kaks mängijat A ja B mängivad järgmist mängu. Enne mängu algust valib A 1000 mitte tingimata erinevat paaritut algarvu. Seejärel valib B neist pooled ja kirjutab tahvlile. Igal käigul valib mängija positiivse täisarvu n, kustutab tahvlilt suvalised algarvud p_1, p_2, $\ldots$, p_n, ja kirjutab tahvlile arvu $p_1 p_2 \ldots p_n - 2$ kõik algarvulised tegurid (kui mõni algarv esineb arvu $p_1 p_2 \ldots p_n - 2$ tegurduses algarvude korrutiseks mitu korda, siis kirjutatakse see algarv nii mitu korda tahvlile, kui ta esineb). Mängija A alustab. Mängija, kelle käigu järel jääb tahvel tühjaks, kaotab. Tõesta, et ühel mängijatest leidub võitev strateegia, ja leia, kummal.

Märkus: Kuna arvul 1 ei leidu algarvulisi tegureid, on tahvlilt ühe arvu 3 kustutamine lubatud käik.

Ülesanne 11. Kolmnurgas ABC kehtib $\angle A = 60^\circ$. Kolmnurga sees valitakse punkt T nii, et

$$\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ.$$

Olgu M külje BC keskpunkt. Tõesta, et $|TA| + |TB| + |TC| = 2|AM|$.

Ülesanne 12. Olgu P_0, P_1, $\ldots$, $P_8 = P_0$ järjestikused punktid ringjoonel ja Q selline punkt hulknurga $P_0 P_1 \ldots P_7$ sees, et iga $i = 1, \ldots, 8$ korral $\angle P_{i-1} Q P_i = 45^\circ$. Tõesta, et summa

$$\sum_{i=1}^{8} |P_{i-1} P_i|^2$$

on minimaalne parajasti siis, kui Q on ringjone keskpunkt.

Ülesanne 13. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ja H tema kõrguste lõikepunkt. Kõrgused, mis tõmmatakse tippudest A, B ja C, lõikavad kolmnurga ümberringjoont teist korda vastavalt punktides H_A, H_B and H_C. Tõesta, et $S_{H_A H_B H_C} \leqslant S_{ABC}$.

Ülesanne 14. Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi BC, CA, AB vastavalt punktides D, E, F. Olgu G lõigu DE keskpunkt. Tõesta, et $\angle EFC = \angle GFD$.

Ülesanne 15. Kõõlnelinurga $ABCD$ ümberringjoone keskpunkt O paikneb nelinurga sees, kuid mitte diagonaalil AC. Nelinurga diagonaalid lõikuvad punktis I. Kolmnurga AOI ümberringjoon lõikab külgi AD ja AB vastavalt punktides P and Q; kolmnurga COI ümberringjoon lõikab külgi CB ja CD vastavalt punktides R and S. Tõesta, et $PQRS$ on rööpkülik.

Ülesanne 16. Olgu n, m ja k positiivsed täisarvud, mille korral $(n-1)n(n+1) = m^k$. Tõesta, et $k = 1$.

Ülesanne 17. Tähistagu $d(n)$ arvu n positiivsete jagajate arvu. Leia kõik kolmikud (n, k, p), kus n ja k on positiivsed täisarvud ja p algarv, mille korral

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Ülesanne 18. Leia kõik täisarvude kolmikud (a, b, c), mille korral $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Ülesanne 19. Näita, et $n^n + (n+1)^{n+1}$ on kordarv lõpmata paljude positiivsete täisarvude n korral.

Ülesanne 20. Leia võrrandi $2x^6 + y^7 = 11$ kõik täisarvulised lahendid.

Tehtävät

10 November 2012, Tartu, Estonia

–Finnish version–

Aikaa on 4 tuntia 30 minuuttia.
Ensimmäisten 30 minuutin aikana voi esittää kysymyksiä.
Ainoat sallitut työvälineet ovat kirjoitus- ja piirustusvälineet.

Tehtävä 1. Luvut 1, 2, ..., 360 ositetaan 9 osajoukoksi peräkkäisiä kokonaislukuja, ja näissä joukoissa olevien lukujen summat järjestetään 3×3-taulukoksi. Onko mahdollista, että näin syntyvä taulukko on taikaneliö?

Huomautus: Taikaneliö on neliön muotoinen lukutaulukko jossa jokaisen rivin, jokaisen sarakkeen ja kummankin lävistäjän lukujen summat ovat kaikki keskenään yhtä suuria.

Tehtävä 2. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Osoita, että

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Tehtävä 3. a) Todista, että yhtälöllä

$$\lfloor x \rfloor (x^2+1) = x^3,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin x, on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu jokaisella kahden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun määräämällä välillä.

b) Osoita, ettei mikään tämän yhtälön positiivisista reaaliratkaisuista ole rationaalinen.

Tehtävä 4. Osoita, että äärettömän monella kokonaislukuparilla (a, b) yhtälön

$$x^{2012} = ax + b$$

ratkaisuiden joukosta löytyy kaksi eri reaalilukua, joiden tulo on 1.

Tehtävä 5. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Tehtävä 6. Pöydällä on 2012 lamppua. Kaksi henkilöä pelaavat seuraavanlaista peliä. Vuorossa oleva pelaaja painaa jonkin lampun katkaisijaa, mutta näin syntyvä asetelma ei saa olla esiintynyt aiemmin pelin aikana. Pelaaja, joka ei voi enää tehdä laillista siirtoa, häviää. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

Tehtävä 7. 2012×2012-ruudukon oikeasta ylänurkasta vasempaan alanurkkaan kulkevan lävistäjän jotkin ruudut on merkitty. Nurkkaruutuja ei ole merkitty. Ruudukon jokaiseen ruutuun kirjoitetaan kokonaisluku seuraavalla tavalla. Ruudukon ylimmän rivin ja vasemman puoleisimman sarakkeen ruutuihin kirjoitetaan luku yksi. Merkittyihin ruutuihin kirjoitetaan kuhunkin nolla. Jokaiseen muuhun ruutuun kirjoitetaan sen yläpuolella ja vasemmalla olevien naapuriruutujen lukujen summa. Osoita, ettei oikeasta alanurkasta voi löytyä luvulla 2011 jaollista lukua.

Tehtävät

10 November 2012, Tartu, Estonia

–Finnish version–

Tehtävä 8. On annettu suunnistettu verkko, joka ei sisällä suunnistettuja syklejä, ja jossa jokaisen polun särmien lukumäärä on enintään 99. Osoita, että on mahdollista värittää verkon särmät kahdella värillä siten, että jokaisessa yksivärisessä polussa on enintään 9 särmää.

Tehtävä 9. Kaikkiin 5×5-ruudukon ruutuihin on kirjoitettu luku nolla. Voimme yksi kerrallaan ottaa jonkin ruudun ja sen naapuriruudut (joilla on yhteinen sivu sen kanssa), ja kasvattaa kaikkien niiden sisältämiä lukuja yhdellä. Onko mahdollista saada aikaan ruudukko, jonka jokaisessa ruudussa on luku 2012?

Tehtävä 10. Henkilöt A ja B pelaavat seuraavaa peliä. Ennen kuin peli alkaa, A valitsee 1000 paritonta alkulukua (joiden ei tarvitse olla erisuuria), ja sitten B valitsee niistä puolet ja kirjoittaa ne tyhjälle liitutaululle. Vuorossa oleva pelaaja valitsee positiivisen kokonaisluvun n, pyyhkii taululta jotkin alkuluvut $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ja kirjoittaa niiden tilalle luvun $p_1p_2 \cdots p_n - 2$ alkulukutekijät. (Jos jokin alkuluku esiintyy alkutekijähajotelmassa useamman kerran, niin se myös kirjoitetaan taululle yhtä monta kertaa kuin se tekijähajotelmassa esiintyy.) Pelaaja A aloittaa, ja se pelaaja, jonka siirto jättää jäljelle vain tyhjän liitutaulun, häviää. Osoita, että toisella pelaajista on voittostrategia, ja selvitä kummalla.

Huomautus: Koska luvulla 1 ei ole alkulukutekijöitä, on yksittäisen luvun 3 poistaminen sallittua.

Tehtävä 11. Olkoon ABC kolmio, jossa $\angle A = 60°$. Piste T sijaitsee kolmion sisällä siten, että $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Olkoon M janan BC keskipiste. Osoita, että $TA + TB + TC = 2AM$.

Tehtävä 12. Olkoot $P_0, P_1, \ldots, P_8 = P_0$ ympyrän kehän peräkkäisiä pisteitä, ja olkoon piste Q monikulmion $P_0P_1 \ldots P_7$ sisällä siten, että $\angle P_{i-1}QP_i = 45°$ kun $i = 1, \ldots, 8$. Osoita, että summa

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i{}^2$$

on pienimmillään täsmälleen silloin kun piste Q on ympyrän keskipiste.

Tehtävä 13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, ja olkoon H sen ortokeskus. Kärjistä A, B ja C piirretyt korkeusjanat leikkaavat ympäripiirretyn ympyrän pisteiden A, B ja C ohella myös pisteissä H_A, H_B ja H_C, tässä järjestyksessä. Osoita, ettei kolmion $\triangle H_AH_BH_C$ ala voi olla suurempi kuin kolmion $\triangle ABC$ ala.

Tehtävä 14. Kolmion ABC sisäänpiirretty ympyrä sivuaa sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, tässä järjestyksessä. Olkoon G janan DE keskipiste. Osoita, että $\angle EFC = \angle GFD$.

Tehtävä 15. Jännenelikulmion $ABCD$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O sijaitsee kyseisen nelikulmion sisällä, mutta ei sen lävistäjällä AC. Nelikulmion lävistäjät leikkaavat pisteessä I. Kolmion AOI ympäripiirretty ympyrä leikkaa sivua AD pisteessä P ja sivua AB pisteessä Q; kolmion COI ympäripiirretty ympyrä leikkaa sivua CB pisteessä R ja sivua CD pisteessä S. Osoita, että $PQRS$ on suunnikas.

Tehtävät

10 November 2012, Tartu, Estonia

–Finnish version–

Tehtävä 16. Olkoot n, m ja k positiivisia kokonaislukuja, joille $(n-1)n(n+1) = m^k$. Osoita, että $k = 1$.

Tehtävä 17. Merkitköön $d(n)$ luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärää. Etsi kaikki kolmikot (n, k, p), joissa n ja k ovat positiivisia kokonaislukuja ja p on alkuluku, ja joille

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Tehtävä 18. Etsi kaikki kokonaislukukolmikot (a, b, c), joille $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Tehtävä 19. Osoita, että luku $n^n + (n+1)^{n+1}$ on yhdistetty äärettömän monella positiivisella kokonaisluvulla n.

Tehtävä 20. Etsi kaikki yhtälön $2x^6 + y^7 = 11$ kokonaislukuratkaisut.

Aufgaben

10. November 2012, Tartu, Estland

–German version–

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Während der ersten 30 Minuten können Anfragen an die Jury gestellt werden.
Schreib- und Zeichengeräte sind die einzigen erlaubten Hilfsmittel.

Aufgabe 1. Die Zahlen von 1 bis 360 werden in 9 Teilmengen von aufeinander folgenden Zahlen zerlegt, die Summen der Zahlen jeder Teilmenge werden in die Felder eines 3×3 Quadrates geschrieben. Ist es möglich, dass sich so ein magisches Quadrat ergibt?

Bemerkung: Ein magisches Quadrat hat für alle Zeilen, alle Spalten und die beiden Diagonalen jeweils die gleiche Summe der Zahlen in den Feldern.

Aufgabe 2. Seien a, b und c reelle Zahlen. Man beweise:

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Aufgabe 3. a) Man zeige, dass die Gleichung

$$\lfloor x \rfloor (x^2+1) = x^3$$

genau eine reelle Lösung in jedem Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen aufweist. Dabei bedeutet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

b) Man zeige, dass keine der positiven reellen Lösungen dieser Gleichung rational ist.

Aufgabe 4. Man beweise, dass für unendlich viele Paare (a, b) ganzer Zahlen die Gleichung

$$x^{2012} = ax + b$$

unter ihren Lösungen zwei untereinander verschiedene reellen Zahlen hat, deren Produkt 1 ergibt.

Aufgabe 5. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

für alle reellen Zahlen x und y.

Aufgabe 6. Auf einem Tisch sind 2012 Lampen aufgebaut, die einzeln geschaltet werden können. Zwei Personen spielen das folgende Spiel: In jedem Zug schaltet der Spieler genau eine Lampe um, aber es darf sich dabei niemals eine Situation wiederholen. Derjenige Spieler, der nicht mehr ziehen kann, verliert. Für welchen der beiden Spieler gibt es eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 7. Auf einem 2012×2012-Feld sind einige Zellen auf der Diagonalen von rechts-oben nach links-unten markiert, wobei die Zellen in den beiden Ecken nicht markiert sind. Nun werden in jede Zelle ganze Zahlen nach folgender Regel geschrieben: Die Zellen entlang der oberen und linken Kante bekommen jeweils eine 1, die markierten Zellen eine 0, und jede der anderen Zellen bekommt die Zahl, die die Summe ihres oberen und linken Nachbarn ist. Man beweise, dass die Zahl in der unteren rechten Ecke nicht durch 2011 teilbar ist.

Aufgaben

10. November 2012, Tartu, Estland

–German version–

Aufgabe 8. Ein gerichteter Graph habe keinen gerichteten Zyklus. Die Anzahl der Kanten auf jedem gerichteten Weg möge 99 nicht überschreiten. Man beweise, dass es möglich ist, die Kanten des Graphen so mit zwei Farben zu färben, dass die Anzahl der Kanten auf jedem einfarbigen Weg nicht größer als 9 sein kann.

Aufgabe 9. In alle Felder eines 5×5-Quadrates werden Nullen geschrieben. Man kann eine beliebige Zelle auswählen und dann in ihr und in allen Zellen, die mit dieser eine gemeinsame Kante haben, die Zahlen um 1 erhöhen. Ist es auf diese Weise möglich, dass alle Zellen gleichzeitig die Zahl 2012 aufweisen?

Aufgabe 10. Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel: Vor dem Beginn des Spiels wählt A 1000 nicht notwendig verschiedene ungerade Primzahlen aus. Dann wählt B die Hälfte von ihnen aus und schreibt sie an die Tafel. In jedem Zug wählt der Spieler eine positive Zahl n, entfernt n beliebig gewählte Primzahlen p_1, p_2, ..., p_n von der Tafel und schreibt dafür alle Primfaktoren der Zahl $p_1p_2 \dots p_n - 2$ an die Tafel (wenn in der Primfaktorzerlegung von $p_1p_2 \dots p_n - 2$ ein Primfaktor mehrfach auftaucht, wird er genau so häufig aufgeschrieben wie er auftaucht). Der Spieler A beginnt; der Spieler, dessen Zug eine leere Tafel hinterlässt, verliert. Man beweise, dass einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat, und gebe an, welcher.

Bemerkung: Da 1 keine Primfaktoren hat, ist es ein legaler Zug, eine einzelne 3 zu entfernen.

Aufgabe 11. Es sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Der Punkt T liegt innerhalb des Dreiecks, so dass $\sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC = \sphericalangle CTA = 120^\circ$ gilt. Sei M der Mittelpunkt von BC. Man beweise, dass $TA + TB + TC = 2AM$ gilt.

Aufgabe 12. Es seien P_0, P_1, ..., $P_8 = P_0$ aufeinander folgende Punkte auf einem Kreis, Q sei ein Punkt innerhalb des Polygons $P_0P_1 \dots P_7$ derart, dass $\sphericalangle P_{i-1}QP_i = 45^\circ$ für $i = 1, \dots, 8$ ist. Man beweise, dass die Summe

$$\sum_{i=1}^{8} \overline{P_{i-1}P_i}^{\,2}$$

genau dann minimal ist, wenn Q der Mittelpunkt des Kreises ist.

Aufgabe 13. Seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck und H dessen Höhenschnittpunkt. Mit H_A, H_B und H_C seien die zweiten Schnittpunkte des Umkreises mit den Höhen von A, B bzw. C bezeichnet. Man zeige, dass der Flächeninhalt von $\triangle H_AH_BH_C$ den Flächeninhalt von $\triangle ABC$ nicht übertrifft.

Aufgabe 14. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Sein Inkreis möge die Seiten BC, CA bzw. AB in den Punkten D, E und F berühren. Sei G der Mittelpunkt der Strecke DE. Man beweise: $\sphericalangle EFC = \sphericalangle GFD$.

Aufgabe 15. Der Umkreismittelpunkt O des Sehnenvierecks $ABCD$ liege innerhalb des Vierecks, aber nicht auf der Diagonalen AC. Die Diagonalen des Vierecks schneiden sich in I. Der Umkreis des Dreiecks AOI schneidet die Seiten AD und AB in den Punkten P bzw. Q; der Umkreis des Dreiecks COI schneidet entsprechend die Seiten CB und CD in den Punkten R und S. Man zeige, dass $PQRS$ ein Parallelogramm ist.

Aufgaben

10. November 2012, Tartu, Estland

–German version–

Aufgabe 16. Es seien n, m und k positive ganze Zahlen mit $(n-1)n(n+1) = m^k$. Man beweise, dass $k = 1$.

Aufgabe 17. Mit $d(n)$ sei die Anzahl der positiven Teiler von n bezeichnet. Man bestimme alle Tripel (n, k, p), bei denen n und k positive ganze Zahlen und p eine Primzahl sind, die folgende Gleichung erfüllen:

$$n^{d(n)} - 1 = p^k$$

Aufgabe 18. Man bestimme alle Tripel ganzer Zahlen (a, b, c) mit $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Aufgabe 19. Man zeige, dass $n^n + (n+1)^{n+1}$ eine zusammengesetzte Zahl für unendlich viele positive ganze Zahlen n ist.

Aufgabe 20. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $2x^6 + y^7 = 11$.

Verkefni

10 nóvember 2012, Tartu, Eistlandi

–Icelandic version–

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur.
Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Leyfileg hjálpargögn eru skrifæri og teikniverkfæri.

Dæmi 1. Heilu tölunum frá og með 1 til og með 360 er skipt í 9 hlutmengi samliggjandi heiltalna. Summa talnanna í hverju hlutmengi er skrifuð í reiti 3×3 fernings. Er mögulegt að þetta myndi töfraferning?

Athugasemd: Töfraferningur er þannig að summa hverrar línu, dálks og beggja hornalína er sama talan.

Dæmi 2. Látum a, b og c vera rauntölur. Sannið að

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Dæmi 3. a) Sýnið að jafan

$$\lfloor x \rfloor (x^2+1) = x^3$$

hafi nákvæmlega eina rauntölulausn fyrir hvert bil samliggjand heiltalna. Með $\lfloor x \rfloor$ táknum við stærstu heiltöluna sem er ekki stærri en x.

b) Sýnið að engin af jákvæðu rauntölulausnunum sé ræð.

Dæmi 4. Sannið að fyrir óendanlega mörg heiltölupör (a, b) séu meðal lausna jöfnunnar

$$x^{2012} = ax + b$$

tvær rauntölur þannig að margfeldi þeirra sé 1.

Dæmi 5. Finnið öll föll $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem uppfylla

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

fyrir allar rauntölur x og y.

Dæmi 6. Á borði eru 2012 lampar. Tveir spila eftirfarandi leik. Þeir skiptast á að leika og leikur felst í því að ýta á rofa einhvers lampa, kveikja á lampa sem slökkt er á eða öfugt. Ekki má endurtaka fyrra ástand allra lampa. Sá tapar sem ekki getur leikið. Hvor á örugga vinningsleið?

Dæmi 7. Á 2012×2012 borði eru sumir reitir hornalínunnar, frá neðra vinstra horninu til efra hægra hornsins, merktir. Mertku reitirnir eru ekki í hornunum. Heilar tölur eru skrifaðar í hvern reit borðsins á eftirfarandi hátt. Allar tölurnar í efstu línu og dálkinum lengst til vinstri eru 1. Allar tölurnar í merktu reitunum eru 0. Í hinum reitunum er summa talnanna fyrir ofan og vinstra megin við reitinn. Sannið að talan í neðra hægra horni sé ekki deilanleg með 2011.

Dæmi 8. Við höfum áttað net án áttaðra rása. Enginn áttaður vegur í netinu hefur fleiri leggi en 99. Sannið að hægt sé að lita leggi netsins með tveimur litum þannig að enginn einlitur áttaður vegur hafi fleiri en 9 leggi.

Dæmi 9. Núll er skrifað í hvern reit 5×5 borðs. Við getum valið reit og hækkað tölu hans og allra reita sem deila með honum hlið um 1. Er mögulegt að enda með töluna 2012 samtímis í öllum reitum?

Verkefni

10 nóvember 2012, Tartu, Eistlandi

–Icelandic version–

Dæmi 10. Tveir leikmenn A og B spila eftirfarandi leik. Áður en leikurinn hefst velur A 1000 frumtölur sem eru oddatölur og ekki endilega ólíkar. Næst velur B helming þeirra og skrifar á töflu. Í hvert skipti sem leikið er velur leikmaður heila tölu n og síðan n frumtölur p_1, p_2, ..., p_n sem hann þurrkar af töflunni og skrifar í stað þeirra frumþætti tölunnar $p_1 p_2 \dots p_n - 2$ (frumþáttur $p_1 p_2 \dots p_n - 2$ er skrifaður jafn oft og hann er endurtekinn í frumþáttuninni). Leikmaður A byrjar og sá tapar sem skilur töfluna eftir tóma að leik loknum. Sannið að til sé örugg vinningsleið. Hvor vinnur samkvæmt henni?

Athugasemd: Talan 1 hefur enga frumþætti svo það er leyfilegt er að þurrka út eitt eintak af 3.

Dæmi 11. Látum ABC vera þríhyrning með hornið $\angle A = 60°$. Punkturinn T liggur innan þríhyrningsins þannig að $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Láum M vera miðpunkt BC. Sannið að $TA + TB + TC = 2AM$.

Dæmi 12. Látum P_0, P_1, ..., $P_8 = P_0$ vera samliggjandi punkta á hring og Q vera punkt innan marghyrningsins $P_0 P_1 \dots P_7$ þannig að $\angle P_{i-1} Q P_i = 45°$ fyrir $i = 1, \dots, 8$. Sannið að summan

$$\sum_{i=1}^{8} |P_{i-1} P_i|^2$$

sé í lágmarki þá og því aðeins að Q sé miðja hringsins.

Dæmi 13. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning og látum H vera hæðamiðju hans. Látum H_A, H_B og H_C tákna hina skurðpunkta hæðalína A, B og C við umhringinn. Sannið að flatarmál $\triangle H_A H_B H_C$ geti ekki verið stærra en flatarmál $\triangle ABC$.

Dæmi 14. Í gefnum þríhyrningi ABC, látum innhringinn snerta hliðarnar BC, CA og AB í D, E og F. Látum G vera miðpunk línustriksins DE. Sannið að $\angle EFC = \angle GFD$.

Dæmi 15. Ummiðjan O er gefinn fyrir ferhyrninginn $ABCD$ og liggur innan hans en ekki á hornalínunni AC. Hornalínur hans skerast í I. Umhringur þríhyrningsins AOI sker hliðarnar AD og AB í punktunum P og Q. Umhringur þríhyrningsins COI sker hliðarnar CB og CD í punktunum R og S. Sannið að $PQRS$ sé samsíðungur.

Dæmi 16. Látum n, m og k vera jákvæðar heiltölur sem uppfylla $(n-1)n(n+1) = m^k$. Sannið að $k = 1$.

Dæmi 17. Látum $d(n)$ tákna fjölda jákvæðra deila tölunnar n. Finnið allar þrenndir (n, k, p) þannig að

$$n^{d(n)} - 1 = p^k,$$

þar sem n og k eru jákvæðar heiltölur og p er frumtala.

Dæmi 18. Finnið allar þrenndir (a, b, c) heiltalna sem uppfylla $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Dæmi 19. Sýnið að $n^n + (n+1)^{n+1}$ er samsett tala fyrir óendalega margar jákvæðar heiltölur n.

Dæmi 20. Finnið allar heiltölulausnir jöfnunnar $2x^6 + y^7 = 11$.

Uzdevumi

2012. gada 10. novembris, Tartu, Igaunija

–Latvian version–

Darba laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Izmantot drīkst tikai rakstīšanai un zīmēšanai paredzētos rīkus.

1. uzdevums. Veselos skaitļus no 1 līdz 360 sadala deviņās pēc kārtas sekojošu skaitļu apakškopās (apakškopas ir netukšas un katrs skaitlis atrodas tieši vienā no apakškopām). Apakškopās esošo skaitļu summas izvieto 3×3 kvadrāta rūtiņās. Vai iespējams, ka šādi izveidojas maģiskais kvadrāts?

Piezīme: Skaitļu kvadrātu sauc par maģisku, ja skaitļu summas pa rindiņām, stabiņiem un abās diagonālēs visas ir vienādas.

2. uzdevums. Doti reāli skaitļi a, b, c. Pierādīt, ka

$$ab + bc + ca + \max\{|a - b|, |b - c|, |c - a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a + b + c)^2.$$

3. uzdevums. a) Pierādīt, ka vienādojumam

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3$$

katrā intervālā starp pēc kārtas sekojošiem veseliem pozitīviem skaitļiem ir tieši viens reāls atrisinājums. $\lfloor x \rfloor$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.

b) Pierādīt, ka neviens no reālajiem pozitīvajiem šī vienādojuma atrisinājumiem nav racionāls skaitlis.

4. uzdevums. Pierādīt, ka bezgalīgi daudziem veselu skaitļu pāriem (a, b) starp vienādojuma

$$x^{2012} = ax + b$$

atrisinājumiem ir divi dažādi reāli skaitļi, kuru reizinājums ir 1.

5. uzdevums. Atrast visas tādas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām vienādība

$$f(x + y) = f(x - y) + f(f(1 - xy))$$

izpildās visiem reāliem skaitļiem x un y.

6. uzdevums. Uz galda stāv 2012 lampas. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli. Katrā gājienā spēlētājs pārslēdz vienas lampas slēdzi, taču nedrīkst izveidoties tāds ieslēgto lampu izvietojums, kāds jau kopš spēles sākuma uz galda ir bijis. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

7. uzdevums. 2012×2012 rūtiņu kvadrātā uz diagonāles, kas labo augšējo stūri savieno ar kreiso apakšējo stūri, ir iekrāsotas dažas rūtiņas. Neviena stūra rūtiņa nav iekrāsota. Katrā kvadrāta rūtiņā tiek ierakstīts vesels skaitlis šādā veidā. Visās augšējās rindas un kreisās kolonnas rūtiņās ierakstīts 1. Visās iekrāsotajās rūtiņās ierakstīta 0. Katrā no pārējām rūtiņām ierakstīts skaitlis, kas vienāds ar to divu skaitļu summu, kas ierakstīti rūtiņās virs un pa kreisi no tās. Pierādīt, ka labajā apakšējā stūrī ierakstītais skaitlis nedalās ar 2011.

Uzdevumi

2012. gada 10. novembris, Tartu, Igaunija

–Latvian version–

8. uzdevums. Orientēts grafs nesatur orientētus ciklus. Katra orientētā ceļa šķautņu skaits nepārsniedz 99. Pierādīt, ka ir iespējams šī grafa šķautnes izkrāsot divās krāsās tā, ka šķautņu skaits katrā vienkrāsainā orientētā ceļā nepārsniedz 9.

9. uzdevums. Katrā kvadrāta 5×5 rūtiņā ir ierakstīta 0. Drīkst patvaļīgā rūtiņā un tās kaimiņu rūtiņās ierakstītos skaitļus palielināt par 1. Vai šādu darbību rezultātā ir iespējams panākt, ka visās kvadrāta rūtiņās vienlaicīgi atrodas skaitļi 2012?

Piezīme: par kaimiņu rūtiņām sauc rūtiņas, kam ir kopīga mala.

10. uzdevums. Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli. Pirms spēles A izvēlas 1000 nepāra pirmskaitļus (ne obligāti dažādus), tad B izvēlas pusi no tiem un uzraksta tos uz tāfeles. Katrā spēles gājienā kaut kādam veselam pozitīvam skaitlim n spēlētājs izvēlas kaut kādus uz tāfeles esošus pirmskaitļus p_1, p_2, $\ldots$, p_n, nodzēš tos un vietā uzraksta skaitļa $p_1p_2\ldots p_n - 2$ pirmreizinātājus (ja skaitļa $p_1p_2\ldots p_n - 2$ sadalījumā pirmreizinātājos kāds pirmskaitlis ir sastopams k reizes, tad to šajā gājienā uzraksta k reizes). Pirmo gājienu izdara A. Spēlētājs, pēc kura gājiena tāfele paliek tukša, zaudē. Pierādīt, ka vienam no spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija, kā arī noteikt, kuram tā ir.

Piezīme: Tā kā skaitlim 1 nav pirmreizinātāju, tad viena skaitļa 3 nodzēšana ir atļauts gājiens.

11. uzdevums. Trijstūrī ABC: $\angle A = 60°$. Trijstūra iekšpusē izvēlēts tāds punkts T, ka $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Punkts M ir BC viduspunkts. Pierādīt, ka $TA + TB + TC = 2AM$.

12. uzdevums. Uz riņķa līnijas dotā secībā izvietoti punkti P_0, P_1, $\ldots$, $P_8 = P_0$. Punkts Q atrodas daudzstūra $P_0P_1\ldots P_7$ iekšpusē, pie tam $\angle P_{i-1}QP_i = 45°$, kur $i = 1, \ldots, 8$. Pierādīt, ka summas

$$\sum_{i=1}^{8} {P_{i-1}P_i}^2$$

vērtība ir minimāla tad un tikai tad, ja Q ir riņķa līnijas centrs.

13. uzdevums. ABC ir šaurleņķu trijstūris, H ir tā augstumu krustpunts. Ar H_A, H_B un H_C apzīmēsim attiecīgi no virsotnēm A, B un C vilkto augstumu otru krustpunktu ar trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju. Pierādīt, ka $\triangle H_AH_BH_C$ laukums nepārsniedz $\triangle ABC$ laukumu.

14. uzdevums. Dots trijstūris ABC, tajā ievilktā riņķa līnija pieskaras malām BC, CA, AB attiecīgi punktos D, E, F. Punkts G ir nogriežņa DE viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle EFC = \angle GFD$.

15. uzdevums. Četrstūrim $ABCD$ apvilktās riņķa līnijas centrs O atrodas četrstūra iekšpusē, bet ne uz diagonāles AC. Četrstūra diagonāles krustojas punktā I. Trijstūrim AOI apvilktajai riņķa līnijai ar malu AD ir kopīgs punkts P, bet ar malu AB — kopīgs punkts Q; trijstūrim COI apvilktajai riņķa līnijai ar malu CB ir kopīgs punkts R, bet ar malu CD — kopīgs punkts S. Pierādīt, ka $PQRS$ ir paralelograms.

16. uzdevums. Pozitīvi veseli skaitļi n, m un k apmierina vienādību $(n-1)n(n+1) = m^k$. Pierādīt, ka $k = 1$.

Uzdevumi

2012. gada 10. novembris, Tartu, Igaunija

–Latvian version–

17. uzdevums. Ar $d(n)$ apzīmēsim skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu. Atrast visus skaitļu trijniekus (n, k, p), kur n un k ir veseli pozitīvi skaitļi un p ir pirmskaitlis, kam izpildās

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

18. uzdevums. Atrast visus tādus veselu skaitļu trijniekus (a, b, c), kas apmierina vienādību $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

19. uzdevums. Pierādīt, ka $n^n + (n+1)^{n+1}$ ir salikts skaitlis bezgalīgi daudzām veselām pozitīvām skaitļa n vērtībām.

20. uzdevums. Atrast visus vienādojuma $2x^6 + y^7 = 11$ atrisinājumus veselos skaitļos.

Užduotys

2012 m. lapkričio 10 d., Tartu, Estija

–Lithuanian version–

Laikas: 4 val. 30 min.
Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.
Leidžiamos tik rašymo ir braižybos priemonės.

1 užduotis. Skaičiai nuo 1 iki 360 suskirstyti į 9 nesikertančias aibes, kurių kiekvieną sudaro iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Suskaičiavus kiekvienos aibės visų elementų sumą, iš gautųjų 9 sumų sudaryta skaičių lentelė 3×3. Ar ši lentelė gali būti magiškasis kvadratas?

Pastaba: Magiškasis kvadratas yra lentelė, kurios kiekvienos eilutės, kiekvieno stulpelio ir bet kurios iš dviejų ilgųjų įstrižainių skaičių suma yra ta pati.

2 užduotis. Bet kokiems realiesiems skaičiams a, b, c įrodykite nelygybę

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

3 užduotis. a) Didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis x, žymimas $\lfloor x \rfloor$. Įrodykite, kad lygtis

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3$$

turi po lygiai vieną realųjį sprendinį kiekviename intervale tarp dviejų gretimų natūraliųjų skaičių.

b) Įrodykite, kad ši lygtis neturi teigiamų racionaliųjų sprendinių.

4 užduotis. Pasirinkus sveikųjų skaičių porą (a, b), sudaryta lygtis

$$x^{2012} = ax + b.$$

Paaiškėjo, kad ją tenkina du skirtingi realieji skaičiai, kurių sandauga lygi 1. Įrodykite, kad tokių sveikųjų skaičių porų (a, b) yra be galo daug.

5 užduotis. Raskite visas tokias funkcijas $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad lygybė

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

galioja bet kokiems realiesiems skaičiams x ir y.

6 užduotis. Ant stalo stovi 2012 lempų. Du žaidėjai žaidžia tokį žaidimą, paeiliui atlikdami ėjimus. Vienu ėjimu žaidėjas turi nuspausti vienos iš lempų jungiklį taip, kad gautasis degančių ir išjungtų lempų derinys nesutaptų su jokiu iki tol buvusiu. Žaidėjas, negalintis atlikti ėjimo, pralaimi. Kuris žaidėjas turi pergalės strategiją?

7 užduotis. Duota lentelė 2012×2012. Keletas jos langelių, esančių įstrižainėje, jungiančioje dešinįjį viršutinį ir kairįjį apatinį langelius, pažymėti (kampiniai langeliai nepažymėti). Į kiekvieną lentelės langelį įrašyta po sveikąjį skaičių. Kairiojo stulpelio ir viršutinės eilutės langeliuose įrašyti vienetai. Pažymėtuose langeliuose įrašyti nuliai. Bet kurio kito langelio skaičius lygus gretimo langelio iš viršaus ir gretimo langelio iš kairės skaičių sumai. Įrodykite, kad apatinio dešiniojo langelio skaičius nesidalija iš 2011.

Užduotys

2012 m. lapkričio 10 d., Tartu, Estija

–Lithuanian version–

8 užduotis. Orientuotame grafe nėra kontūrų (ciklų, gaunamų einant briaunų kryptimi). Bet kuris kelias (grandinė, gaunama einant briaunų kryptimi) grafe sudarytas iš ne daugiau nei 99 briaunų. Įrodykite, kad grafo briaunas galima nuspalvinti dviem spalvom taip, kad bet kurį vienspalvį kelią sudarytų ne daugiau nei 9 briaunos.

9 užduotis. Visuose lentelės 5×5 langeliuose įrašyti nuliai. Leidžiama bet kurio langelio ir visų su juo bendrą kraštinę turinčiųjų langelių skaičius padidinti vienetu. Ar gali po kelių tokių ėjimų visi lentelės skaičiai būti vienu metu lygūs 2012?

10 užduotis. Du žaidėjai A ir B žaidžia tokį žaidimą. Prieš jam prasidedant, žaidėjas A pasirenka 1000 (nebūtinai skirtingų) nelyginių pirminių skaičių. Tada B bet kuriuos 500 iš jų užrašo ant lentos. Tuomet A ir B paeiliui atlieka ėjimus. Vienu ėjimu žaidėjas turi pasirinkti natūralųjį skaičių n, nutrinti kuriuos nors pirminius skaičius p_1, p_2, …, p_n, o vietoj jų užrašyti visus pirminius skaičiaus $p_1 p_2 \dots p_n - 2$ daliklius (jei skaičiaus $p_1 p_2 \dots p_n - 2$ išskaidyme pirminiais daugikliais kuris nors pirminis daliklis pasikartoja kelis kartus, jis užrašomas tiek kartų, kiek pasikartoja). Žaidėjas A pradeda, o pralaimi tas žaidėjas, po kurio ėjimo skaičių ant lentos nelieka. Įrodykite, kad vienas iš žaidėjų turi pergalės strategiją ir nurodykite kuris.

Pastaba: Skaičius 1 neturi pirminių daliklių, todėl ėjimu galima tiesiog nutrinti vieną skaičių 3.

11 užduotis. Duotas toks trikampis ABC, kad $\angle A = 60^\circ$. Trikampio vidaus taškas T tenkina lygybes $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Taškas M dalija atkarpą BC perpus. Įrodykite, kad $TA + TB + TC = 2AM$.

12 užduotis. Taškai, priklausantys vienam apskritimui, sunumeruoti ratu iš eilės: $P_0, P_1, \dots, P_8 = P_0$. Taškas Q yra toks daugiakampio $P_0 P_1 \dots P_7$ vidaus taškas, kad $\angle P_{i-1} Q P_i = 45^\circ$, kai $i = 1, \dots, 8$. Įrodykite, kad suma

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i^{\,2}$$

įgyja savo mažiausią galimą reikšmę tada ir tik tada, kai taškas Q sutampa su apskritimo centru.

13 užduotis. Trikampis ABC yra smailusis, o taškas H yra jo ortocentras. Apibrėžtojo apskritimo antrąsias sankirtas su trikampio aukštinėmis, išvestomis iš viršūnių A, B ir C, atitinkamai pažymėkime H_A, H_B ir H_C. Įrodykite, kad $\triangle H_A H_B H_C$ plotas neviršija $\triangle ABC$ ploto.

14 užduotis. Trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas liečia kraštines BC, CA, AB atitinkamai taškuose D, E, F. Taškas G dalija atkarpą DE perpus. Įrodykite, kad $\angle EFC = \angle GFD$.

15 užduotis. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, kurio centras O yra keturkampio viduje, bet nepriklauso jo įstrižainei AC. Keturkampio įstrižainės kertasi taške I. Apskritimas, apibrėžtas apie trikampį AOI, kraštines AD ir AB kerta atitinkamai taškuose P ir Q (nesutampančiuose su A); apskritimas, apibrėžtas apie trikampį COI, kraštines CB ir CD kerta atitinkamai taškuose R ir S (nesutampančiuose su C). Įrodykite, kad keturkampis $PQRS$ yra lygiagretainis.

Užduotys

2012 m. lapkričio 10 d., Tartu, Estija

–Lithuanian version–

16 užduotis. Natūralieji skaičiai n, m ir k tenkina lygybę $(n-1)n(n+1) = m^k$. Įrodykite, kad $k = 1$.

17 užduotis. Natūraliojo skaičiaus n teigiamų daliklių skaičių pažymėkime $d(n)$. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus (n, k, p), kad p yra pirminis skaičius ir galioja lygybė

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

18 užduotis. Raskite visus sveikuosius lygties $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$ sprendinius (a, b, c).

19 užduotis. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių natūraliųjų skaičių n, kad $n^n + (n+1)^{n+1}$ yra sudėtinis skaičius.

20 užduotis. Raskite visus sveikuosius lygties $2x^6 + y^7 = 11$ sprendinius.

Oppgaver

10. november 2012, Tartu, Estland

–Norwegian version–

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter.
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.
Kun skrive- og tegneredskaper tillat.

Oppgave 1. Tallene fra 1 to 360 partisjoneres i 9 delmengder bestående av etterfølgende heltall, og summene av tallene i hver delmengde plasseres deretter i et 3×3-kvadrat. Er det mulig at kvadratet er et magisk kvadrat?

Merk: Et magisk kvadrat er et kvadrat der summene i hver rad, hver kolonne og begge diagonalene alle er like.

Oppgave 2. La a, b, c være reelle tall. Vis at

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Oppgave 3. a) Vis at likningen

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

der $\lfloor x \rfloor$ betegner det største heltallet som ikke er større enn x, har nøyaktig én løsning for hvert intervall mellom påfølgende heltall.

b) Vis at ingen av de positive reelle løsningene til likningen er rasjonale.

Oppgave 4. Vis at for uendelig mange par (a, b) av heltall har likningen

$$x^{2012} = ax + b$$

blant sine løsninger to forskjellige reelle tall hvis produkt er 1.

Oppgave 5. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

for alle reelle tall x og y.

Oppgave 6. Det er 2012 lamper på et bord. To personer spiller følgende spill. I hvert trekk slår den ene spilleren av eller på en lampe, men aldri slik at hun kommer tilbake til en tidligere konfigurasjon. Den spilleren som ikke kan gjøre et trekk taper. Hvilken spiller har en vinnende strategi?

Oppgave 7. På et 2012×2012-brett er noen av feltene på diagonalen fra øverst til høyre til nederst til venstre merket. Ingen av de merkede feltene ligger i et hjørne. Heltall er skrevet i feltene på følgende måte: Alle feltene langs den øvre og den venstre kanten inneholder 1, mens alle de markerte feltene inneholder 0. De resterende feltene inneholder summen av tallet i feltet rett over og tallet i feltet rett over feltet selv. Vis at tallet i feltet nederst til høyre ikke er delelig med 2011.

Oppgave 8. En rettet graf inneholder ingen rettede sykler. Ingen rettet sti består av mer enn 99 kanter. Vis at det er mulig å farge kantene i to farger slik ingen ensfarget rettet sti består av mer enn 9 kanter.

Oppgaver

10. november 2012, Tartu, Estland

–Norwegian version–

Oppgave 9. I hvert felt i et 5×5-brett er det skrevet 0. I hvert skritt kan vi velge et vilkårlig felt, og øke tallet i dette og alle dets naboer (som deler en side med feltet) med 1. Er det mulig å oppnå at alle tallene på brettet er 2012 ved slike skritt?

Oppgave 10. To spillere A og B spiller følgende spill. Før spillet starter velger A 1000 ikke nødvendigvis forskjellige odde primtall, hvorav B velger halvparten og skriver dem på en tavle. I hvert trekk velger spilleren som står for tur et positivt heltall n, visker ut noen primtall p_1, p_2, …, p_n fra tavlen og skriver alle primfaktorene til $p_1 p_2 \dots p_n - 2$ på tavlen. Hvis en primfaktor forekommer med multiplisitet skrives dette tilsvarende mange ganger på tavlen. Spiller A gjør første trekk, og spilleren som levner en tom tavle taper. Vis at én av spillerne har en vinnende strategi, og finn ut hvilken.

Merk: Siden 1 ikke har noen primfaktorer er det å viske ut ett 3-tall et lovlig trekk.

Oppgave 11. La ABC være en trekant med $\angle A = 60^\circ$. Punktet T ligger i trekanten slik at $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. La M være midtpunktet på BC. Vis at $TA + TB + TC = 2AM$.

Oppgave 12. La P_0, P_1, …, $P_8 = P_0$ være punkter på en sirkel i denne rekkefølgen. La videre Q være et punkt i mangekanten $P_0 P_1 \dots P_7$ slik at $\angle P_{i-1} Q P_i = 45^\circ$ for $i = 1, \dots, 8$. Vis at summen

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i^{\,2}$$

er minimal hvis og bare hvis Q er sentrum i sirkelen.

Oppgave 13. La ABC være en spissvinklet trekant med ortosenter H. La H_A, H_B og H_C være det andre skjæringspunktet mellom omsirkelen og høydene fra henholdsvis A, B og C. Vis at arealet av $\triangle H_A H_B H_C$ ikke er større enn arealet av $\triangle ABC$.

Oppgave 14. Gitt en trekant ABC, la innsirkelen tangere sidene BC, CA og AB i henholdsvis D, E og F. La G være midtpunktet på linjestykket DE. Vis at $\angle EFC = \angle GFD$.

Oppgave 15. Omsenteret O til en gitt syklisk firkant $ABCD$ ligger i firkanten, men ikke på diagonalen AC. Firkantens diagonaler skjærer hverandre i I. Omsirkelen til AOI skjærer AD og AB i henholdsvis P og Q, mens omsirkelen til COI skjærer CB og CD i henholdsvis R og S. Vis at $PQRS$ er et parallellogram.

Oppgave 16. La n, m og k være positive heltall som tilfredsstiller $(n-1)n(n+1) = m^k$. Vis at $k = 1$.

Oppgave 17. La $d(n)$ betegne antall positive divisorer av n. Finn alle tripler (n, k, p) av positive heltall der p er et primtall slik at

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Oppgave 18. Finn alle tripler (a, b, c) av heltall slik at $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Oppgave 19. Vis at $n^n + (n+1)^{n+1}$ er sammensatt for uendelig mange positive heltall n.

Oppgave 20. Finn alle heltallsløsninger for likningen $2x^6 + y^7 = 11$.

Zadania

10 listopada 2012 r., Tartu, Estonia

–Wersja polska–

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut.
Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.
Dopuszczalne jest posiadanie jedynie przyborów do pisania i rysowania.

Zadanie 1. Liczby od 1 do 360 podzielono na 9 zbiorów złożonych z kolejnych liczb całkowitych, a sumy elementów każdego z tych zbiorów wpisano w pola kwadratu 3×3. Czy może się zdarzyć, że otrzymany kwadrat jest kwadratem magicznym?

Uwaga: Kwadrat magiczny to kwadrat, w którym sumy liczb we wszystkich wierszach, we wszystkich kolumnach oraz na obu przekątnych są jednakowe.

Zadanie 2. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Zadanie 3. a) Wykazać, że równanie

$$\lfloor x \rfloor (x^2+1) = x^3,$$

ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty w każdym przedziale pomiędzy dwiema kolejnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x.)

b) Wykazać, że żaden dodatni pierwiastek rzeczywisty tego równania nie jest liczbą wymierną.

Zadanie 4. Dowieść, że dla nieskończenie wielu par liczb całkowitych (a, b) równanie

$$x^{2012} = ax + b$$

ma wśród swoich pierwiastków dwie różne liczby rzeczywiste, których iloczyn wynosi 1.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że równość

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych x oraz y.

Zadanie 6. Na stole stoi 2012 lamp. Dwaj gracze grają w następującą grę. W każdym ruchu gracz przełącza wybraną lampę, przy czym nie wolno mu w ten sposób doprowadzić do takiej konfiguracji zapalonych lamp, która już wystąpiła na stole. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Zadanie 7. Na tablicy 2012×2012 zaznaczono niektóre pola na przekątnej z prawego górnego do lewego dolnego rogu, przy czym żadne z narożnych pól nie zostało zaznaczone. W każde pole tablicy wpisano liczbę całkowitą w następujący sposób. We wszystkie pola wzdłuż górnego brzegu i lewego brzegu tabeli wpisano liczby 1, we wszystkie zaznaczone pola — liczby 0, a w każde pozostałe pole — sumę dwóch liczb znajdujących się w polach sąsiednich od góry i od lewej strony. Wykazać, że liczba stojąca w prawym dolnym rogu nie jest podzielna przez 2011.

BALTIC WAY 2012 Tartu

Zadania

10 listopada 2012 r., Tartu, Estonia

–Wersja polska–

Zadanie 8. Dany jest graf skierowany nie zawierający cykli skierowanych. Liczba krawędzi dowolnej ścieżki skierowanej nie przekracza 99. Udowodnić, że można pomalować każdą krawędź grafu jednym z dwóch kolorów w taki sposób, by liczba krawędzi dowolnej jednokolorowej ścieżki skierowanej nie przekraczała 9.

Zadanie 9. W każde pole tablicy 5×5 wpisano zero. W jednym ruchu możemy wybrać dowolne pole oraz zwiększyć o 1 liczbę w wybranym polu i we wszystkich polach mających z nim wspólny bok. Czy w wyniku takich ruchów można uzyskać liczbę 2012 jednocześnie we wszystkich polach?

Zadanie 10. Gracze A i B grają w następującą grę. Przed grą gracz A wskazuje 1000 niekoniecznie różnych nieparzystych liczb pierwszych, a gracz B wybiera połowę z nich i zapisuje wybrane liczby na tablicy. W każdym ruchu gracz wybiera dodatnią liczbę całkowitą n, zmazuje z tablicy wybrane przez siebie liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$ oraz zapisuje na tablicy wszystkie dzielniki pierwsze liczby $p_1p_2 \ldots p_n - 2$ (każdy dzielnik tyle razy, ile wynosi jego krotność w rozkładzie liczby $p_1p_2 \ldots p_n - 2$ na czynniki pierwsze). Grę rozpoczyna gracz A, a przegrywa gracz, po ruchu którego tablica stała się pusta. Dowieść, że jeden z graczy ma strategię wygrywającą i rozstrzygnąć, który z nich.

Uwaga: Liczba 1 nie ma dzielników pierwszych, więc zmazanie pojedynczej liczby 3 jest dopuszczalnym ruchem.

Zadanie 11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle A = 60°$. Punkt T leży wewnątrz tego trójkąta, przy czym $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Punkt M jest środkiem odcinka BC. Udowodnić, że $TA + TB + TC = 2AM$.

Zadanie 12. Punkty $P_0, P_1, \ldots, P_8 = P_0$ leżą w wypisanej kolejności na ustalonym okręgu. Punkt Q leży wewnątrz wielokąta $P_0P_1 \ldots P_7$, przy czym $\angle P_{i-1}QP_i = 45°$ dla $i = 1, \ldots, 8$. Wykazać, że suma

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i{}^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość wtedy i tylko wtedy, gdy punkt Q jest środkiem danego okręgu.

Zadanie 13. Wysokości trójkąta ostrokątnego przecinają się w punkcie H. Niech H_A, H_B i H_C będą punktami, w których wysokości opuszczone odpowiednio z wierzchołków A, B i C przecinają ponownie okrąg opisany na danym trójkącie. Udowodnić, że pole trójkąta $H_AH_BH_C$ nie przekracza pola trójkąta ABC.

Zadanie 14. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt G jest środkiem odcinka DE. Wykazać, że $\angle EFC = \angle GFD$.

Zadanie 15. Środek O okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ leży wewnątrz tego czworokąta, ale poza przekątną AC. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie I. Okrąg opisany na trójkącie AOI przecina odcinki AD i AB odpowiednio w punktach P i Q, a okrąg opisany na trójkącie COI przecina odcinki CB i CD odpowiednio w punktach R i S. Dowieść, że czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem.

Zadania

10 listopada 2012 r., Tartu, Estonia

–Wersja polska–

Zadanie 16. Dodatnie liczby całkowite n, m oraz k spełniają równość $(n-1)n(n+1) = m^k$. Wykazać, że $k = 1$.

Zadanie 17. Niech $d(n)$ oznacza liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby n. Znaleźć wszystkie takie trójki dodatnich liczb całkowitych (n, k, p), że p jest liczbą pierwszą oraz

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Zadanie 18. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych (a, b, c) spełniających równanie

$$a^2 + b^2 + c^2 = 20122012.$$

Zadanie 19. Wykazać, że liczba $n^n + (n+1)^{n+1}$ jest złożona dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n.

Zadanie 20. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $2x^6 + y^7 = 11$ w liczbach całkowitych x, y.

BALTIC WAY 2012 Tartu

Задачи

10 ноября 2012, Тарту, Эстония

–Русская версия–

Длительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
Вопросы принимаются в течение первых 30 минут.
Разрешается пользоваться лишь письменными принадлежностями.

1. Множество натуральных чисел от 1 до 360 разбито на 9 частей; каждая часть состоит из нескольких последовательных чисел. Суммы чисел в этих частях записали в некотором порядке в клетки квадрата 3×3. Мог ли получиться магический квадрат?

(В магическом квадрате суммы во всех строках, столбцах и двух диагоналях равны.)

2. Даны вещественные числа a, b, c. Докажите, что

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \le 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

3. а) Докажите, что на каждом интервале между двумя последовательными натуральными числами уравнение

$$[x](x^2+1) = x^3$$

имеет ровно один вещественный корень.

б) Докажите, что любой положительный корень этого уравнения иррационален.

4. Докажите, что существует бесконечно много пар целых чисел (a, b), для которых выполняется следующее условие: среди корней уравнения

$$x^{2012} = ax + b$$

есть два различных вещественных числа, произведение которых равно 1.

5. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$f(x+y) = f(x-y) + f\big(f(1-xy)\big).$$

6. Табло состоит из 2012 лампочек. Двое игроков играют в следующую игру. Ход игрока состоит в том, что он изменяет состояние одной лампочки (т. е. выключает или включает ее), при этом нельзя повторять позицию, которая уже встречалась на табло. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

7. В таблице 2012×2012 на диагонали, идущей из правого верхнего угла в левый нижний, отмечено несколько клеток, ни одна из которых не является угловой. В клетки таблицы вписаны числа: вдоль верхней и левой сторон таблицы все числа равны 1; числа в отмеченных клетках равны 0; в каждой из остальных клеток число равно сумме двух чисел, стоящих в соседних с ней сверху и слева клетках. Докажите, что число в правом нижнем углу не делится на 2011.

8. Ориентированный граф не содержит циклов, а любой ориентированный путь в нем содержит не более 99 ребер. Докажите, что ребра графа можно покрасить в два цвета так, что любой одноцветный ориентированный путь будет содержать не более 9 ребер.

9. Во всех клетках квадрата 5×5 расставлены нули. Разрешается выбрать клетку и увеличить на 1 число в этой клетке и во всех клетках, соседних с ней по стороне. Можно ли получить квадрат 5×5, в каждой клетке которого стоит число 2012?

Задачи

10 ноября 2012, Тарту, Эстония

–Русская версия–

10. Игроки A и B играют в следующую игру. Перед началом игры A называет 1000 не обязательно различных нечетных простых чисел, а B выбирает половину из них и выписывает их на доску. Далее на каждом ходу игрок выбирает натуральное число n, выбирает на доске некоторый набор чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, стирает их и записывает вместо них все простые делители из разложения на простые множители числа $p_1p_2\ldots p_n - 2$ (каждое простое выписывается столько раз, сколько раз оно встречается в разложении). Игрок A ходит первым. Проигрывает тот, после чьего хода доска опустела. Докажите, что один из игроков имеет выигрышную стратегию и определите, кто именно.

Примечание. Поскольку число 1 не имеет простых множителей, разрешен ход, состоящий из стирания одной тройки.

11. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Внутри треугольника отмечена точка T, для которой $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Точка M — середина стороны BC. Докажите, что $TA+TB+TC=2AM$.

12. На данной окружности отмечены точки $P_0, P_1, \ldots, P_8 = P_0$ (в указанном порядке); точка Q внутри многоугольника $P_0P_1\ldots P_7$ такова, что $\angle P_{i-1}QP_i = 45°$ для $i = 1, \ldots, 8$. Докажите, что сумма

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i^2$$

минимальна тогда и только тогда, когда Q — центр окружности.

13. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Высоты из вершин A, B, C пересекают описанную окружность в точках H_a, H_b, H_c соотвественно. Докажите, что площадь треугольника $H_aH_bH_c$ не превосходит площади треугольника ABC.

14. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Точка G — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle EFC = \angle GFD$.

15. Центр O описанной окружности вписанного четырехугольника $ABCD$ лежит внутри четырехугольника, но не на диагонали AC. Диагонали пересекаются в точке I. Описанная окружность треугольника AOI пересекает стороны AD и AB соответственно в точках P и Q; описанная окружность треугольника COI пересекает стороны CB и CD соответственно в точках R и S. Докажите, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм.

16. Даны натуральные числа n, m, k, для которых

$$(n-1)n(n+1) = m^k.$$

Докажите, что $k = 1$.

17. Пусть $d(n)$ — количество натуральных делителей числа n. Найдите все тройки (n, k, p), где n и k — натуральные, p — простое, для которых

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

18. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c), для которых $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

19. Докажите, что число $n^n + (n+1)^{n+1}$ является составным для бесконечного количества натуральных n.

20. Найдите все решения уравнения $2x^6 + y^7 = 11$ в целых числах.

Problem

10 november 2012, Tartu, Estland

–Swedish version–

Tid: 4 timmar och 30 minuter.
Under de första 30 minuterna kan frågor ställas till juryn.
Endast skriv- och ritverktyg är tillåtna.

Problem 1. Talen från 1 till 360 partitioneras i 9 delmängder av på varandra följande heltal, och summorna av talen i var delmängd placeras i rutorna i ett 3×3-rutnät. Är det möjligt att rutnätet visar sig vara en magisk kvadrat?

Anmärkning: En magisk kvadrat är en kvadrat där summorna av talen i var rad, i var kolumn och i båda diagonalerna alla är lika.

Problem 2. Låt a, b, c vara reella tal. Bevisa att

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Problem 3. a) Visa att ekvationen

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

där $\lfloor x \rfloor$ betecknar det största heltalet som inte är större än x, har precis en reell lösning i varje intervall mellan på varandra följande positiva heltal.

b) Visa att ingen av de positiva reella lösningarna till denna ekvation är rationell.

Problem 4. Bevisa att för oändligt många heltalspar (a, b) finns det bland lösningarna till ekvationen

$$x^{2012} = ax + b$$

två olika reella tal vars produkt är 1.

Problem 5. Finn alla funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ för vilka

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

gäller för alla reella tal x och y.

Problem 6. På ett bord står 2012 lampor uppställda. Två personer spelar följande spel. I varje drag slår spelaren om strömbrytaren på en lampa, men han får aldrig återgå till en kombination av tända lampor som redan funnits på bordet. En spelare som inte kan göra sitt drag förlorar. Vilken spelare har en vinnande strategi?

Problem 7. På ett bräde med 2012×2012 rutor har några rutor på diagonalen från det övre högra till det nedre vänstra hörnet markerats. Ingen av de markerade rutorna är i ett hörn. Heltal skrivs in i alla brädets rutor på följande sätt: Alla talen i rutor på den övre kanten och på den vänstra kanten är ettor. Alla talen i de markerade rutorna är nollor. Var och en av de övriga rutorna innehåller ett tal som är summan av dess övre granne och dess vänstra granne. Visa att talet i det nedre högra hörnet inte är delbart med 2011.

Problem

10 november 2012, Tartu, Estland

–Swedish version–

Problem 8. En riktad graf innehåller inte några riktade cykler. Antalet kanter i en riktad väg överstiger ingenstans 99. Visa att det är möjligt att färglägga kanterna i grafen med två färger på så sätt att antalet kanter i en enfärgad riktad väg ingenstans överstiger nio.

Problem 9. I alla rutor i ett 5×5-rutnät skrivs talet 0. Vi kan ta en godtycklig ruta och lägga till 1 till talet i denna ruta och i alla rutor som har en sida gemensam med den. Är det möjligt att få talet 2012 i alla rutor samtidigt?

Problem 10. Två spelare, A och B, spelar följande spel. Innan spelet börjar väljer A ut 1000 inte nödvändigtvis olika udda primtal, och därefter väljer B ut hälften av dem och skriver dem på en svart tavla. I vart drag väljer spelaren på tur ett positivt heltal n, suddar ut några primtal p_1, p_2, …, p_n från tavlan, och skriver därefter istället dit alla primfaktorerna till $p_1 p_2 \dots p_n - 2$ (om ett primtal förekommer flera gånger i primtalsfaktoriseringen av $p_1 p_2 \dots p_n - 2$ så skrivs det ned så många gånger som det förekommer). Spelaren A börjar, och den spelare vars drag lämnar tavlan tom har förlorat. Visa att en av de två spelarna har en vinnande strategi, och avgör vem.

Anmärkning: Eftersom 1 saknar primfaktorer är det ett giltigt drag att sudda ut en trea.

Problem 11. Låt ABC vara en triangel med $\angle A = 60^\circ$. Punkten T ligger inuti triangeln och är sådan att $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Låt M vara mittpunkten på BC. Bevisa att $TA + TB + TC = 2AM$.

Problem 12. På en cirkel ligger punkterna P_0, P_1, …, $P_8 = P_0$ i denna ordning. Låt Q vara en punkt inuti polygonen $P_0 P_1 \dots P_7$ sådan att $\angle P_{i-1} Q P_i = 45^\circ$ för $i = 1, \dots, 8$. Visa att summan

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i{}^2$$

är minimal om och endast om Q är cirkelns mittpunkt.

Problem 13. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel och låt H vara höjdernas skärningspunkt. Med H_A, H_B respektive H_C betecknas den andra skärningspunkten mellan den omskrivna cirkeln och höjden genom A, B respektive C. Bevisa att arean av $\triangle H_A H_B H_C$ inte är större än arean av $\triangle ABC$.

Problem 14. Givet en triangel ABC, låt dess inskrivna cirkel tangera sidorna BC, CA, AB i D, E respektive F. Låt G vara mittpunkten på linjesegmentet DE. Visa att $\angle EFC = \angle GFD$.

Problem 15. Givet är en cyklisk fyrhörning $ABCD$ sådan att mittpunkten O för dess omskrivna cirkel ligger inuti fyrhörningen men inte på diagonalen AC. Fyrhörningens diagonaler skär varandra i I. Den omskrivna cirkeln för triangeln AOI skär sidorna AD och AB i punkterna P respektive Q; den omskrivna cirkeln för triangeln COI skär sidorna CB och CD i punkterna R respektive S. Bevisa att $PQRS$ är en parallellogram.

Problem 16. Låt n, m och k vara positiva heltal som uppfyller $(n-1)n(n+1) = m^k$. Visa att $k = 1$.

Problem

10 november 2012, Tartu, Estland

–Swedish version–

Problem 17. Låt $d(n)$ beteckna antalet positiva delare till n. Finna alla taltripplar (n, k, p), där n och k är positiva heltal och p är ett primtal, sådana att

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Problem 18. Finn alla heltalstripplar (a, b, c) som uppfyller $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Problem 19. Visa att $n^n + (n+1)^{n+1}$ är sammansatt för oändligt många positiva heltal n.

Problem 20. Finn alla heltalslösningar till ekvationen $2x^6 + y^7 = 11$.